ministère
éducation
nationale

ÉduSCOL
[dgesco]

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

Mathématiques

Collège

- Ressources pour les classes de 6e, 5e, 4e, et 3e du collège -

- Géométrie au collège -

Juillet 2007

GÉOMÉTRIE

Plus encore qu'à l'école primaire, l'enseignement de la géométrie occupe une place importante dans la formation des élèves en mathématique. De fait, les programmes de géométrie reposent sur deux idées essentielles :
- continuer à développer les dimensions perceptive et instrumentée de la pratique de la géométrie de l'école primaire ;
- initier à la géométrie déductive dans le prolongement du travail entrepris sur le raisonnement.

Les pratiques mises en œuvre à l'école primaire (observation, description, reproduction, représentation, construction, mesurage, argumentation) se développent sur des objets déjà rencontrés ou sur des objets nouveaux, réels ou représentés. Pour les élèves, le statut théorique des objets étudiés se précise au fur et à mesure que leur sont conférées des définitions ou des propriétés caractéristiques.

En effet, à côté des propriétés rencontrées à l'école primaire (alignement, parallélisme, perpendicularité, égalité de longueurs, d'angles ou d'aires, présence d'un axe de symétrie), obtenues ou constatées à l'aide d'instruments, sont installées de nouvelles propriétés des objets du plan[1] (par exemple, les propriétés caractéristiques des quadrilatères usuels), auxquelles se réfèrent les argumentations et sur lesquelles peut se développer l'apprentissage du raisonnement déductif.

I- Objectifs généraux

D'une manière plus globale, l'enseignement de la géométrie contribue, comme celui des autres rubriques des programmes, à la pratique de l'activité mathématique par les élèves de collège.

> ***À travers la résolution de problèmes, la modélisation de quelques situations et l'apprentissage progressif de la démonstration, les élèves prennent conscience petit à petit de ce qu'est une véritable activité mathématique : identifier et formuler un problème, conjecturer un résultat en expérimentant sur des exemples, bâtir une argumentation, contrôler les résultats obtenus en évaluant leur pertinence en fonction du problème étudié, communiquer une recherche, mettre en forme une solution.***
> (BO hors série n°6 avril 2007, Mathématiques, Introduction générale pour le collège : les mathématiques comme discipline de formation générale)

Au delà de cette description générale, trois finalités primordiales et complémentaires peuvent être distinguées et assignées à l'enseignement de la géométrie au collège :

• Fournir des bases pour développer une capacité à géométriser un problème spatial ou non, ce qui implique la nécessité de construire un modèle à l'aide d'objets géométriques et de le travailler à l'aide de savoirs géométriques.

Cette dimension fondamentale est soulignée dans le rapport de la CREM[2] sur l'enseignement de la géométrie :

> *"De fait, chaque mathématicien a ses représentations concrètes de situations complexes qui lui servent de raccourcis de pensée…"*
> *"Penser géométriquement, c'est avoir une vision globale d'une question mathématique, la perception plus locale intervenant ensuite, notamment avec les calculs."*

[1] Les objets de l'espace, quant à eux, continuent à faire l'objet d'une approche à caractère essentiellement expérimental au collège.
[2] Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques, présidée par Jean-Pierre Kahane.

• Fournir un cadre pour développer les capacités à expérimenter et à mettre en œuvre des démarches d'investigation.
Cet axe prend toute sa signification dans le contexte plus général de l'enseignement des sciences au collège.[3]
• Fournir l'un des supports de l'apprentissage du raisonnement déductif.[4,5]

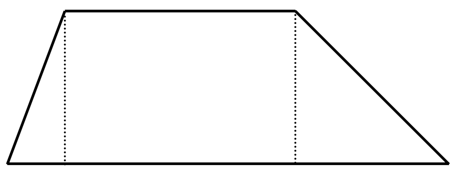
Ce sont ces trois objectifs qui fournissent les axes de réflexion des paragraphes qui suivent.

II- D'une géométrie instrumentée à une géométrie théorique

- De l'objet réel à sa modélisation

Géométriser un problème, c'est transposer le problème, qui peut être concret ou non, le plus souvent spatial au niveau du collège, dans le cadre de la géométrie afin de le simplifier et de le résoudre. C'est le cas, par exemple, lors du calcul de l'aire d'un champ. Le champ réel a une certaine forme. Le processus de modélisation géométrique comporte deux étapes :
- assimilation du champ à une surface plane limitée par des portions de lignes droites ;
- assimilation de cette surface à un polygone élémentaire (trapèze dans l'exemple qui suit) ou un agencement de plusieurs polygones simples.

Le recours à un schéma pour "simplifier" et s'approprier la situation étudiée illustre ce passage de la réalité au domaine de la géométrie. La figure géométrique intervient ainsi comme une maquette de la réalité. Ces transferts sont déjà travaillés à l'école primaire. Cette habitude du recours à une visualisation simplificatrice peut paraître naturelle à certains élèves à l'entrée au collège, mais reste à construire pour beaucoup d'autres. Il est donc indispensable de travailler cette compétence.
Une fois le transfert effectué dans le cadre géométrique, la résolution du problème repose sur des propriétés attachées aux objets qui sont utilisés alors comme des modèles.
Le modèle référent possède un statut mathématique organisé en propriétés. Le schéma "simplifie" donc mais ajoute aussi des éléments de connaissance.



Ainsi, dans l'exemple précédent du champ trapézoïdal, on passe du champ à un trapèze, puis, enfin au "Trapèze" dont on peut calculer l'aire, par décomposition en triangles et rectangle, à l'aide de hauteurs issues de deux sommets qui ne correspondent à rien dans la réalité.

- Deux types de situation

• Deux types de situations peuvent se présenter selon que le statut de modèle mathématique est à créer ou bien est déjà installé.

Considérons, par exemple, l'activité suivante, utilisée dans le but de mettre en place la caractérisation des points d'un cercle. Cette activité permet de travailler une nouvelle conception du cercle illustrée par le passage d'une ligne tracée au compas à une figure constituée de points ayant une même caractéristique.

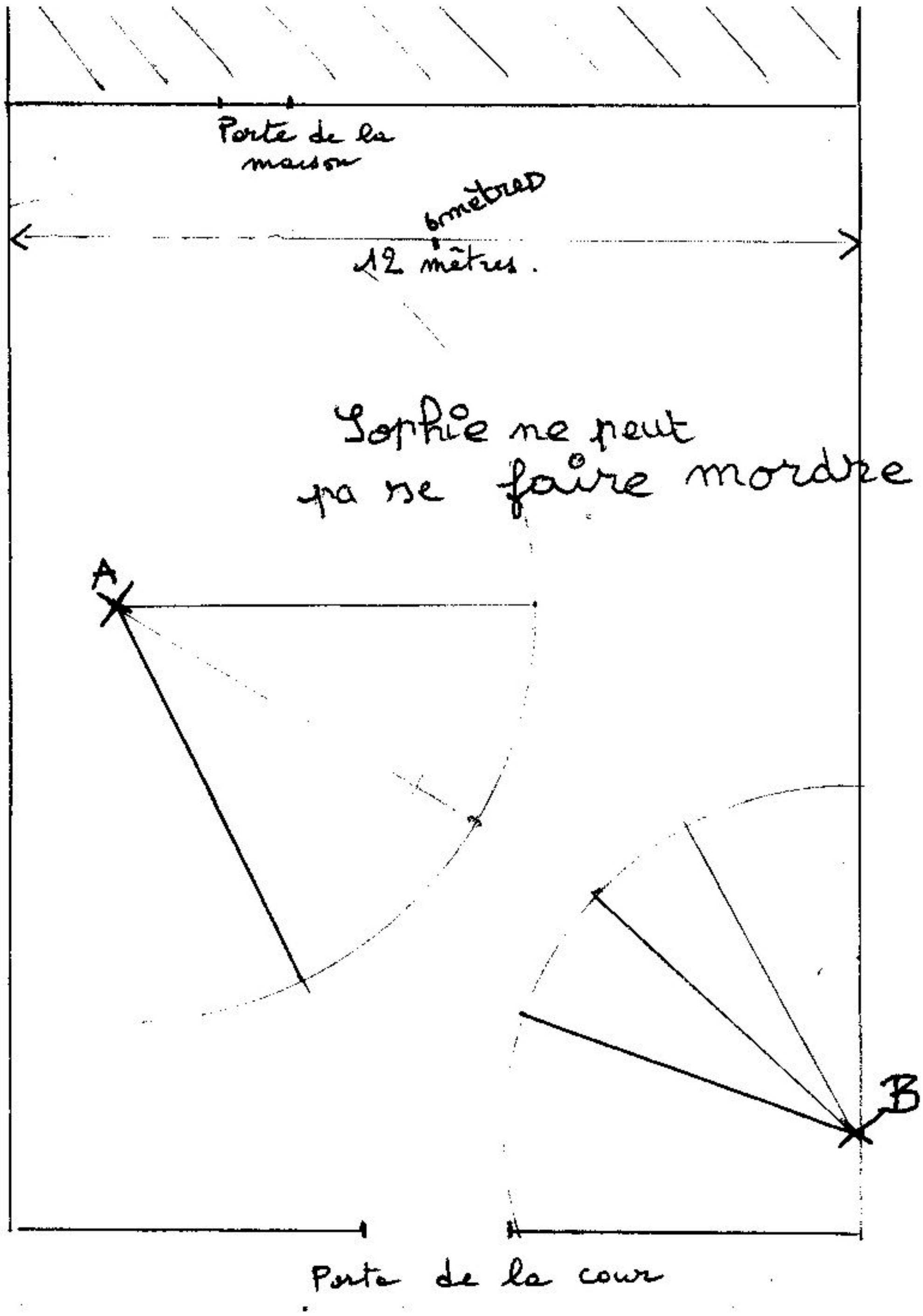
---

[3] Voir l'introduction générale des programmes des disciplines scientifiques : BO hors série n°6, avril 2007.
[4] Le bien fondé de la présence de l'apprentissage de la géométrie déductive dans l'enseignement des mathématiques en France fait l'objet d'un large développement dans le rapport de la CREM.
[5] Cet aspect est développé dans le document d'accompagnement sur le raisonnement et la démonstration.

Les deux chiens

Sophie doit aller chercher du lait à la ferme dont la cour est représentée par le schéma ci-contre (feuille donnée aux élèves). En A et B sont attachés deux chiens.
En A, Azor avec une chaîne de 6 mètres
En B, Balthazar avec une chaîne de 5 mètres.
Sophie pourra-t-elle aller jusqu'à la porte de la ferme sans se faire mordre ?

Travail de l'élève (début de 6ème):



Une étape initiale (qui n'est pas demandée à l'élève) consiste à utiliser un "plan" pour représenter la cour de ferme. Ce plan est fourni à l'élève. L'échelle (1 cm pour 1 m) n'est pas

indiquée mais peut être déterminée à partir de la donnée de la largeur de la cour. La notion de longueur d'un segment est déjà installée.
Il est possible de remarquer deux étapes successives de modélisation :
1- l'élève modélise la chaîne tendue par un simple segment (dessiné dans plusieurs positions). L'objet est encore matériel même s'il "possède" une longueur, propriété bien mathématique. Les chiens sont aussi réduits à des points, ce qui semble mettre en évidence chez cet enfant le début d'une mathématisation de la situation.
2- les arcs de cercles marquent une étape caractérisée par une nouvelle modélisation faisant intervenir le cercle du point de vue d'une propriété caractéristique de ses points.
Cet exemple montre ainsi un premier pas vers la mise en place conceptuelle de la propriété caractéristique des points d'un cercle à partir d'une vision concrète et intuitive de l'enfant. Il est possible que le cercle n'apparaisse qu'après que l'élève a tracé plusieurs segments dont il "voit" alors que les extrémités semblent appartenir à une figure connue.

Le problème proposé pourrait tout aussi bien servir au réinvestissement de la même propriété (l'ensemble des points équidistants d'un point donné est le cercle…) après sa mise en place. Il s'agit alors de la deuxième des situations évoquées en titre : le statut du cercle comme ensemble de points caractérisés par la propriété d'équidistance à un point peut être alors utilisé directement.
Des situations similaires (mise en évidence de propriétés ou réinvestissement de ces propriétés) peuvent être construites notamment à partir des représentations utilisées pour étudier des problèmes de triangulation et/ou régionnement comme le suivant :

Un trésor est caché, d'après un vieux grimoire, à 14 km de La Chapelle sur Erdre et à 28 km de Nozay. De plus, il se trouve au sud d'une ligne droite passant par St Etienne de Monluc et Ligné.
Trouve le nom de la ville où il est caché. (Carte fournie. Echelle : 1cm pour 2 km)

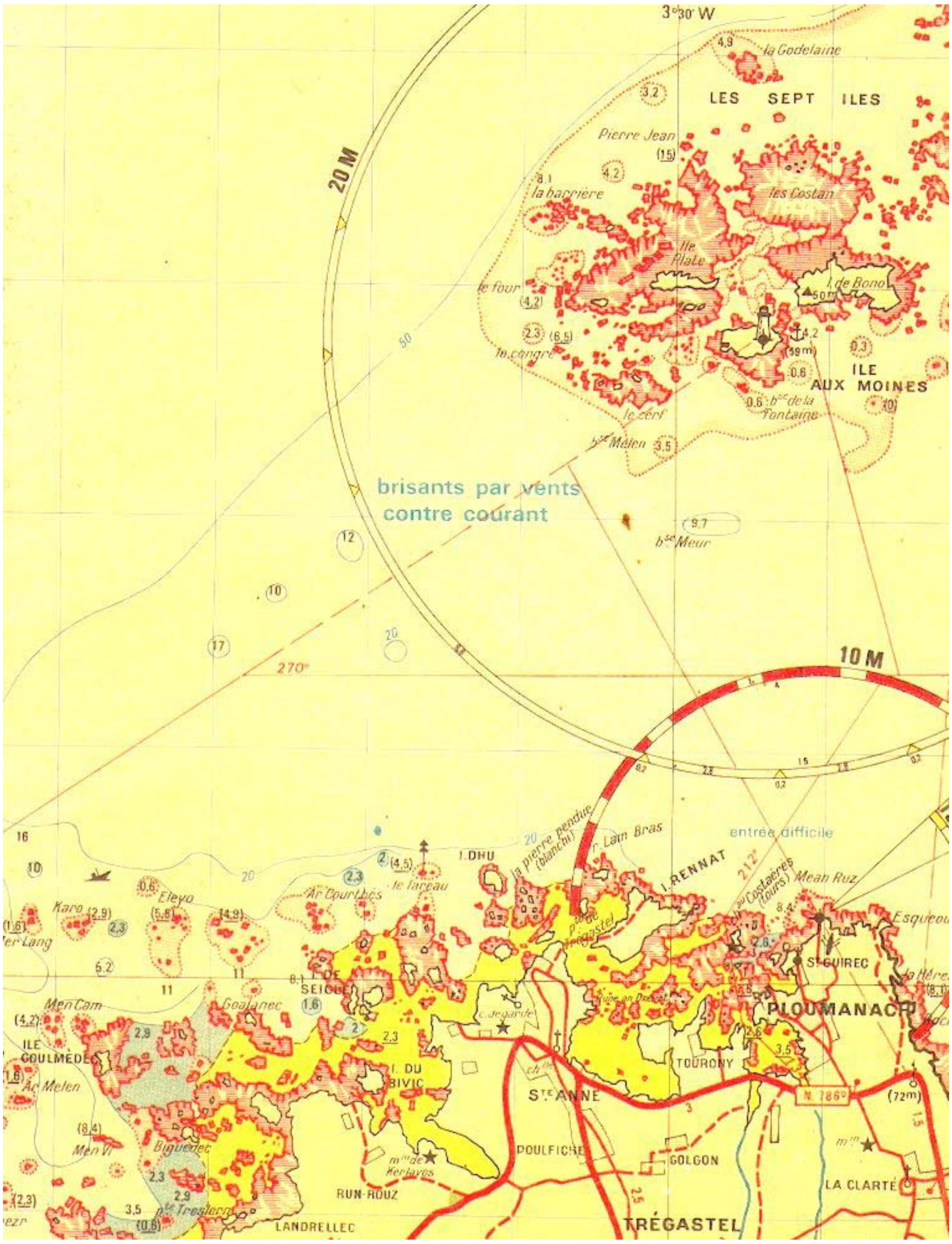
• Tout au long du cursus en collège, les apprentissages s'appuient notamment sur des problèmes de ce type. Les modélisations à effectuer doivent rester accessibles. L'existence d'une étape intermédiaire (passage à un schéma, un plan, une carte…), intégrée (ou non) à l'énoncé du problème, est un élément constitutif de cette accessibilité dans la mesure où sa présence induit de fait une modélisation à poursuivre.
Voici deux situations (classe de troisième) qui illustrent cette différenciation. Dans le premier exemple (position d'un navire), une carte est donnée et la transposition du problème dans le plan géométrique est donc immédiate. L'exemple suivant de la "distance à l'horizon" demande un travail bien plus important de conceptualisation (passage de la sphère terrestre à un cercle la symbolisant, abandon de l'idée d'une représentation à l'échelle, impossible à mettre en œuvre) et nécessite, pour géométriser la situation, un accompagnement de l'enseignant.

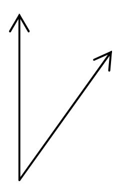
Un navigateur maladroit

Pour se situer sur la carte, le navigateur relève[6] le phare de l'ile aux moines au 70 ° et le corps de garde de Ste Anne (Trégastel) au 145°. Au moment de marquer sa position sur la carte, son rapporteur s'envole et tombe à l'eau. Il se rappelle cependant que la direction phare-corps de garde fait un angle de 20° avec l 'axe Nord-Sud.

[6] Relever un amer, c'est mesurer (dans le sens des aiguilles d'une montre) l'angle entre la direction du Nord et la direction de l'amer, c'est à dire la demi-droite [BA), B est la position du bateau et A celle de l'amer.
Un amer est un point fixe, noté sur la carte marine, et visible du large.

Comment peut-il situer la position du bateau sur la carte ?
(Il dispose toujours de sa règle graduée, d'un compas et de sa calculatrice !)

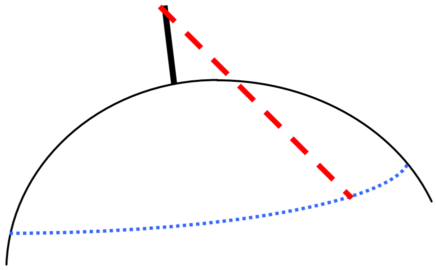




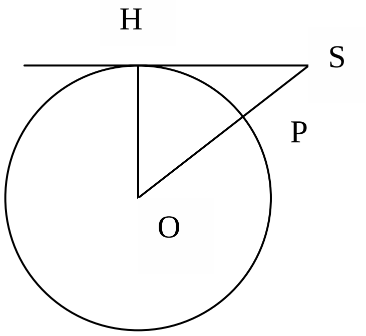
La ligne d'horizon

La plate forme du phare de la Hague (près de Cherbourg) est située à 52 mètres au-dessus de l'eau. Jusqu'à quelle distance un observateur, placé sur cette plate forme, peut-il espérer apercevoir un objet au ras de l'eau (par beau temps et mer calme) ?

Cette situation (problème de la ligne d'horizon) s'appuie sur la courbure de la surface de la sphère terrestre. Un travail préalable d'explicitation peut aider à bien appréhender le problème, avec une première schématisation "naïve".



La modélisation proprement dite fait appel à la représentation de la sphère par un de ses grands cercles et fait donc passer de l'espace au plan.



La longueur cherchée est la longueur de la tangente au cercle issue du sommet S (P est le pied du phare). Le passage de la première représentation à la seconde est une démarche délicate qui peut nécessiter l'intervention de l'enseignant. C'est surtout l'occasion de développer la capacité à substituer un problème plan à un problème de l'espace.

D'après le théorème de Pythagore appliqué au triangle SOH rectangle en H,
$SH^2 = OS^2 - OH^2$.
Deux directions d'exploitation se présentent.

1- Le rayon de la sphère terrestre est approximativement de 6400 km, d'où le calcul à mener :
$SH^2 \approx 6400{,}052^2 - 6400^2$, puis SH $\approx$25,8 km, solution approchée dont on peut se satisfaire dans le cadre du problème.

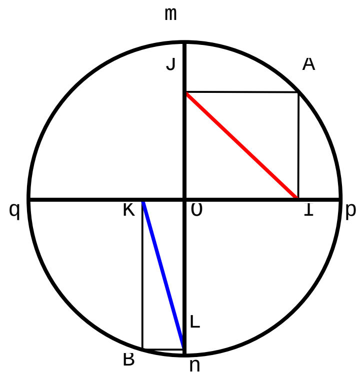
2- Cette égalité peut être transformée en $SH^2 = (R+h)^2 - R^2$, qui peut conduire à un travail, plus ambitieux mais accessible sur le plan du calcul, sur la transformation d'une expression algébrique[7]. Nous obtenons aussi une expression qui permet d'obtenir la distance d'horizon pour n'importe quel phare (ou gratte-ciel ou aéronef !). La possibilité de faire varier *h* permet aussi de basculer naturellement dans le domaine des fonctions.

- Définitions et propriétés

• Les définitions et les propriétés contribuent à développer la connaissance des objets et leur intérêt pour représenter les situations. Elles constituent d'autre part, dans le cadre de la géométrie, les références nécessaires sur lesquelles peut se faire l'apprentissage du raisonnement déductif.
Ainsi, l'exemple suivant, dans lequel les justifications sont simples et accessibles aux élèves, permet de réinvestir d'une façon non triviale le fait que les diagonales d'un rectangle sont de même longueur (et que tous les rayons d'un même cercle sont de même longueur).

[7] Où l'on voit que l'utilisation de *R* comme paramètre facilite plutôt le calcul…comme en physique.

La figure ci-contre représente un cercle de centre O *et deux de ses diamètres perpendiculaires.*
OIAJ *et* OKBL *sont deux rectangles.*
Quel est le plus long des deux segments [IJ] *ou* [KL] *?*

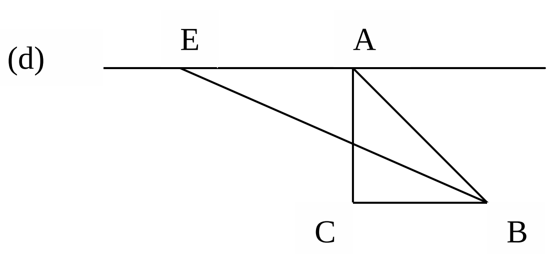


L'étude ne vise pas un simple traitement instrumenté mais concerne une configuration sur laquelle fonctionnent des propriétés. Il ne s'agit plus de modélisation pour résoudre un problème concret mais d'une situation purement abstraite, représentative d'une autre famille de problèmes de géométrie, relative à l'utilisation directe (sans changement de cadre) d'un corpus de définitions et de propriétés pour établir une preuve.

• Les objets de la géométrie du collège (*cf* annexe) sont relativement peu nombreux. Ils constituent, avec les définitions et propriétés afférentes ainsi que les grandeurs associées, un bagage suffisamment riche pour soutenir de véritables démarches d'investigation et des activités d'argumentation et de preuve. Au niveau de la sixième, les propriétés utilisables restent assez élémentaires, accessibles sur le plan conceptuel : égalités de longueurs, d'angles, orthogonalité, parallélisme…et ne donnent pas lieu à des formalisations trop difficiles pour les élèves. Les angles et les aires constituent des outils de démonstration parfois sous-exploités. Ainsi, dès la classe de cinquième, les angles permettent d'engager des démonstrations simples sans être simplistes, comme dans la situation suivante où est mise en œuvre la conjonction de deux propriétés concernant les angles : la définition de la bissectrice d'une part et le théorème relatif à l'intersection d'une droite avec deux parallèles[8].

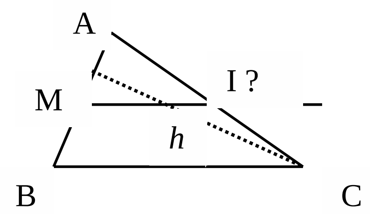
ABC *est un triangle rectangle et isocèle de sommet principal* C.
La droite (d) *passant par* A *est parallèle à* (BC).

La bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ *coupe la droite* (d) *en* E.
Quelle est la nature du triangle ABE *?*



D'une façon similaire, quelques résultats peuvent s'établir à partir de considérations sur les aires (de triangles). En classe de quatrième, notamment, la mise en place du théorème de la droite des milieux (et sa réciproque) ou plus généralement du théorème de Thalès (dans un cas générique) permet de mobiliser les connaissances sur les aires de triangles dans des conditions faciles d'accès.

Prenons, par exemple, la réciproque du théorème de la droite des milieux :
"D*ans un triangle, la droite passant par le milieu d'un côté et parallèle à un autre côté, passe par le milieu du troisième côté.* "



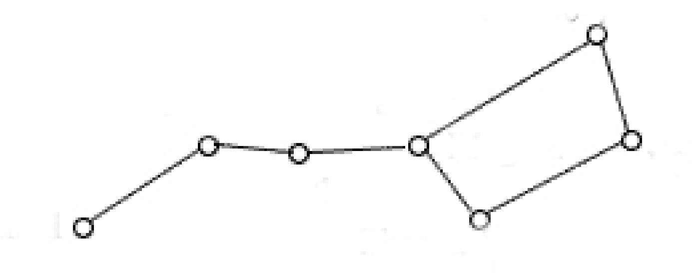
[8] Un travail complémentaire peut consister à déterminer les données de l'énoncé qui ne sont pas utiles.

Une fois la désignation des différents éléments constitutifs de la figure effectuée, la démonstration repose sur l'utilisation d'une propriété ("*Deux triangles ayant un côté commun et les sommets opposés à ce côté situés sur une parallèle au côté commun ont la même aire.* ") qui sera étudiée plus loin (*cf* figures-clés).
Le développement pourrait être le suivant :
" <u>Problème</u> : montrer que AI = CI.
(NB : l'alignement et l'ordre des points sont dans les données)
Les triangles MBC *et* IBC *(d'après la propriété précédente) ont la même aire.*
Cette aire est égale à la moitié de l'aire du triangle ABC.
En effet, $\mathcal{A}$ (ABC) = $\mathcal{A}$ (MBC) + $\mathcal{A}$ (MAC).
Or MA = MB*, donc,* $\mathcal{A}$ (MBC) = $\mathcal{A}$ (MAC) = $\frac{1}{2}$ ($h\times$MB).
Donc, l'aire du triangle ABI *(complément dans* ABC *du triangle* CBI*) est aussi égale à la moitié de celle de* ABC *et donc égale à l'aire du triangle* CBI. *En revenant à l'expression de l'aire d'un triangle, comme les deux triangles* ABI *et* CBI *ont la hauteur issue de* B *commune, les longueurs* AI *et* IC *sont égales…*"

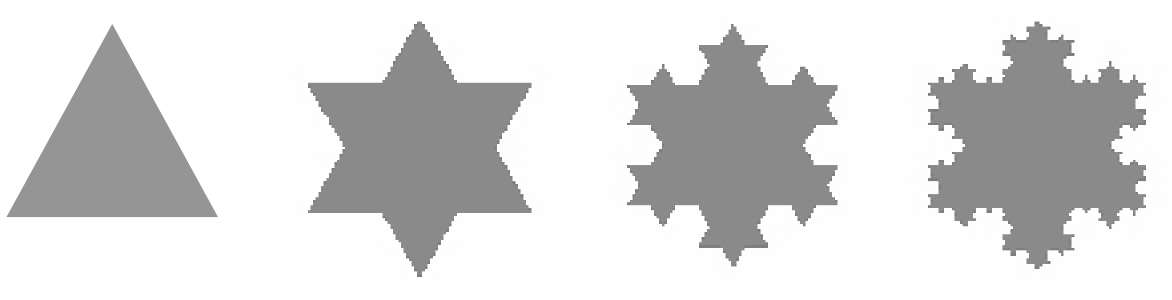
- Nécessité de travailler dans divers environnements

• La résolution d'un même problème dans des contextes différents, et les interactions qu'elle amène à construire, contribue à une approche plus efficace des concepts mis en oeuvre. Par exemple, tracer un terrain de jeu rectangulaire de dimensions 5m sur 6m sur le sable d'une plage ou sur le bitume de la cour de récréation (avec uniquement un décamètre ruban), un rectangle de 5 cm sur 6 cm sur une feuille unie (double décimètre et compas) ou sur un écran d'ordinateur (sans la possibilité de matérialiser automatiquement un angle droit) permet de découvrir et travailler une diversité de moyens de tracer un angle droit (médiatrice, losange) et donc de mettre en évidence la puissance d'un modèle théorique pour résoudre des problèmes dans différents contextes matériels. Les travaux géométriques doivent ainsi s'effectuer dans différents environnements : espace ordinaire (cour de récréation, par exemple), espace de la feuille de papier uni ou quadrillé, écran d'ordinateur.
• Il est par ailleurs important, tout au long du collège, de s'appuyer sur les relations avec d'autres domaines où se rencontrent des formes géométriques (nature, technologie, œuvres d'art…) pour mettre en évidence le caractère universel de ces dernières.
Une activité classique consiste à exploiter la forme de la constellation de la Grande Ourse (ou d'autres) pour travailler la reproduction de figures et l'usage du rapporteur et de la règle graduée.

Exemple : *Reproduire à l'échelle 3 la représentation ci-dessous de la constellation du grand chariot* :



De même, l’esquisse de la courbe de Von Koch (courbe du flocon de neige) offre l’occasion d’un travail de tracé méticuleux et de différents calculs de périmètres voire d’aires et…de la découverte de l’idée de récurrence.



III - Les démarches : expérimentation , investigation

- Nécessité de la résolution de problèmes

• Pour construire un savoir solide, acquérir un comportement scientifique et ne pas avoir un ressenti dogmatique de l'enseignement qui lui est proposé, l'élève doit être confronté le plus souvent possible à des situations dans lesquelles il aura à faire preuve d'initiative. C'est évidemment le cas dans le cadre de la géométrie. Les problèmes rencontrés doivent être de vrais problèmes, contenir un enjeu mais rester accessibles aux élèves pour répondre aux objectifs définis ci-dessus. Le travail d'investigation (observation, manipulation, conjectures, débat, recherche d'explication ou de preuve) va permettre à l'élève de mettre en œuvre et de développer (c'est à dire apprendre à structurer) des capacités heuristiques personnelles qu'il pourra réutiliser dans des résolutions d'autres problèmes en autonomie.

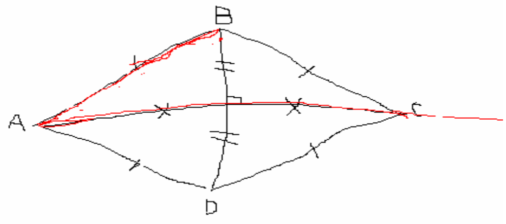
• Les phases d'investigation ou d'expérimentation, qu'elles soient réalisées en groupe ou individuellement, peuvent prendre appui sur les logiciels de géométrie dynamique (vérification d’une conjecture ou découverte d’une propriété, par exemple par la mise en évidence d'un invariant lorsqu'on "bouge" les points d'une configuration).

- Importance des problèmes de construction

Les problèmes de construction jouent un rôle important dans la prise de conscience de la nécessité d'une phase d'analyse et dans l'accompagnement des apprentissages sur le raisonnement déductif. Dans la mesure où l'objet est à construire, il faut l'imaginer a priori, au besoin en élaborant un schéma à main levée, ce qui permet alors de remplacer les contraintes de départ par des contraintes plus directement utilisables (phase d'analyse) dans un tracé. Le schéma aide, en effet, à visualiser l'objet visé et permet d'identifier les conditions nécessaires à sa réalisation, conditions qui reposent sur ses propriétés. Un codage du schéma s'avère ainsi indispensable. La phase de synthèse qui doit terminer le raisonnement et qui consiste en fait à vérifier que ce qui a été mis en évidence dans la phase d'analyse est bien suffisant repose en collège essentiellement sur le tracé de l'objet[9]. Ces activités de construction doivent être pratiquées le plus tôt possible, dès la 6e. Hormis l'exemple, déjà évoqué, de la recherche du trésor, des situations telles que la suivante, choisie dans un contexte non concret, permettent aux élèves de travailler la démarche spécifique décrite ci-dessus, et donc d'en prendre conscience.

[9] Les discussions éventuelles sur l'existence de la solution sont rarement abordées au collège.

En 6[e] *: Construire un losange* ABCD. *Données : le segment* [AB] *et la demi-droite* [Ax), *support de la diagonale* [AC]. (Schéma d'analyse proposé par un élève)



L'activité de l'élève comporte plusieurs points essentiels :
- l'analyse grâce à une représentation à main levée de la figure "visée" pour matérialiser la situation ;
- l'identification des propriétés pertinentes ;
- les codages associés ;
- les différentes procédures de résolution (par les côtés/par les diagonales) ;
- la formulation (rédaction de la propriété utilisée) d'une argumentation.

- Constructions et tracés

La distinction entre "construire" et "tracer" constitue une difficulté particulière pour les élèves, liée à la compréhension des contrats induits par les consignes.
"Construire", c'est résoudre un problème du même type que la résolution d'une équation : un objet inconnu doit obéir à un certain nombre de contraintes ; la traduction de ces contraintes en propriétés de l'objet et leur exploitation (en utilisant ici des propriétés géométriques) vont permettre d'arriver à isoler une (ou plusieurs) procédures d'obtention de l'objet visé[10]. La résolution d'un problème de construction sous-entend que l'élève doit être capable de décrire ou justifier la procédure élaborée.
"Tracer", c'est exécuter une tâche bien délimitée sans obligation de justification (la procédure ne doit pas poser problème). De fait, il y a souvent confusion entre les deux : *"Tracer un triangle rectangle d'hypoténuse 7 cm et dont un côté de l'angle droit mesure 4 cm"* sous-entend un problème de construction mais l'existence de l'objet à réaliser n'est pas mise en doute. Le contrat doit alors être clarifié.

Tracer est une tâche essentiellement matérielle. Elle peut consister en :
- la production d'un dessin à main levée ou avec les instruments en procédant par essais et ajustements ;
- l'exécution d'une procédure de construction automatisée au niveau d'apprentissage considéré.

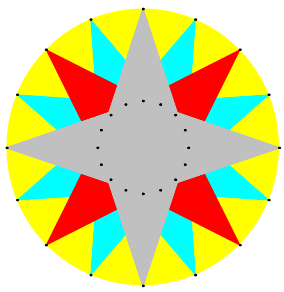
Le seul objectif du tracé est l'obtention d'une figure correcte. La "correction" de la figure dépend ainsi des exigences implicites et/ou explicites du contexte.
L'élève, confronté à un problème de construction peut contourner celui-ci et aboutir à un dessin acceptable en ayant recours à des tracés approchés. Un autre élève peut avoir résolu le problème de construction mais ne pas produire un tracé acceptable du fait de maladresse. Dans un problème de construction, la validation porte bien plus sur la démarche que sur le produit obtenu.

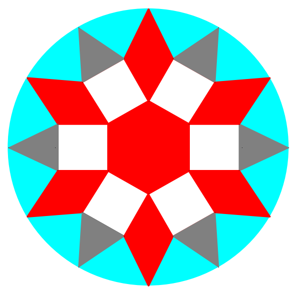
- Reproduction de figures

La reproduction de figures est aussi un exercice dans lequel la démarche d'analyse est essentielle. Dans ce type de problème, les contraintes sont données visuellement (la figure à

[10] Il resterait à s'assurer que l'objet en question répond bien aux critères donnés au départ, compte tenu d'une démarche essentiellement construite sur des conditions nécessaires.

reproduire) et la question de l'existence ne se pose pas : l'objet est déjà matérialisé. L'analyse porte alors sur la reconnaissance de figures élémentaires de la configuration et sur l'articulation des tâches successives à mettre en œuvre pour arriver au résultat. Le niveau auquel la situation peut être proposée est déterminé par la complexité de la figure à élaborer et le temps donné pour le faire. Les exemples suivants souvent rencontrés de reproduction de figures peuvent ainsi faire l'objet de travaux à tous les niveaux du collège à condition de disposer d'un temps suffisant (en dehors de la classe par exemple). Ces travaux peuvent être, d'autre part, différenciés suivant les élèves.





La présence, de plus en plus marquée au cours des années du cursus de collège, de théorèmes liant la géométrie à des propriétés exprimées sous forme numérique (théorèmes de Pythagore, de Thalès, trigonométrie), permet une évolution vers des démarches plus simples à maîtriser sur le plan conceptuel mais apportant leur lot de difficultés techniques (calcul numérique, calcul littéral). C'est le cas du problème du "navigateur maladroit", présenté plus haut.

IV- Le raisonnement déductif en géométrie

- Comprendre le contrat

La notion de preuve est à la base du raisonnement déductif.

> *La question de la preuve occupe une place centrale en mathématiques. La pratique de l'argumentation pour convaincre autrui de la validité d'une réponse, d'une solution ou d'une proposition ou pour comprendre un « phénomène » mathématique a commencé dès l'école primaire et se poursuit au collège pour faire accéder l'élève à cette forme particulière de preuve qu'est la démonstration.*

(BO hors série n°6 avril 2007, initiation progressive à la démonstration)

Les aspects généraux des problèmes posés par l'apprentissage du raisonnement déductif et de la démonstration sont développés dans un document d'accompagnement particulier. Dans le domaine de la géométrie, il faut en souligner quelques aspects spécifiques ou importants.
Le premier obstacle rencontré en 6^{e} (et qui perdure longtemps !) est la compréhension du changement de contrat accompagnant le changement de statut des figures. Il ne suffit plus d'observer ou de mettre en évidence à l'aide des instruments des propriétés sur une figure pour qu'elles soient avérées sur le plan mathématique. La nécessité de construire une argumentation à partir d'une base de références identifiées comme telles n'est ni naturelle, ni intuitive. C'est en travaillant, par exemple, des situations construites sur des doutes "visuels", comme celle de l'exercice sur les rayons du cercle présenté dans "II –Définitions et propriétés", plutôt qu'en appliquant de façon immédiate un théorème, que l'élève comprendra les nouvelles règles du jeu impliquées par les situations de preuve en géométrie. Plus généralement, ce n'est pas en étant confronté à des situations d'une grande pauvreté que l'on

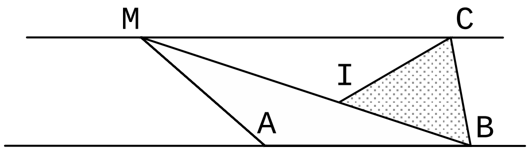
peut appréhender vraiment la nécessité d'une preuve, ni d'ailleurs en résolvant de manière répétitive des exercices-types.

- Deux démarches essentielles

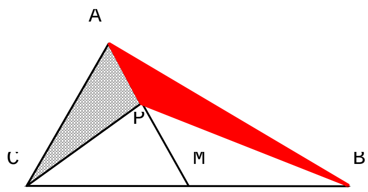
Parmi les démarches heuristiques conduisant à l'élaboration d'une démonstration, certaines sont identifiables et donc susceptibles d'être construites et travaillées. Il s'agit principalement du repérage des figures-clés dans un contexte donné et de la pratique de l'analyse remontante.

• Le recours à des figures-clés repose sur la reconnaissance d'un modèle déjà rencontré. Cela suppose donc l'existence d'une base de référence constituée de configurations et de théorèmes associés. C'est le cas de la plupart des théorèmes mis en place au collège (propriétés caractéristiques des quadrilatères, propriétés des angles obtenus en coupant deux parallèles par une sécante, configurations de Thalès, de Pythagore, concours de droites remarquables dans un triangle…). Il en est d'autres qui ne sont pas l'objet de compétences décrites dans le programme mais qui, dans la mesure où elles reviennent souvent, finissent par fixer des connaissances à leur propos. Ainsi, les résultats suivants, relatifs aux aires de triangles peuvent constituer des figures-références "complémentaires".

Deux triangles ayant un côté commun et les sommets opposés sur une parallèle au côté commun ont la même aire.[11]



Dans le triangle ABC, tout point P de la médiane [AM] détermine deux triangles APB et APC dont les aires sont égales[12].



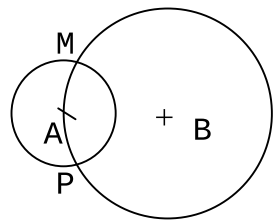
La constitution d'une base de figures-clés rend par ailleurs incontournable un travail sur les "mots" et ce qu'ils peuvent évoquer, car, avoir assimilé une propriété, c'est être capable d'associer une figure-clé et un énoncé.
L'inconvénient majeur réside dans le fait que, si l'élève ne reconnaît pas la figure-clé (si la mise en évidence de la figure-clé nécessite par exemple un enrichissement ou un appauvrissement de la figure), il ne peut poursuivre sa démarche de raisonnement. Il lui faut donc d'autres possibilités d'analyse pour franchir l'obstacle.

• L'analyse remontante consiste, à partir du résultat que l'on veut démontrer, à repérer une ou des propriétés de la configuration étudiée qui, une fois établie(s), impliquerai(en)t, en appliquant un théorème identifié, le résultat à démontrer. Il suffit alors de substituer (momentanément) au problème posé au départ le problème qui consiste à établir les éléments intermédiaires. Cette démarche peut ainsi permettre, dans la plupart des situations rencontrées en géométrie au collège, de "remonter" d'étape en étape une chaîne d'îlots déductifs (hypothèse-propriété-conclusion) jusqu'à un problème dont la résolution sera immédiate (en général, en appliquant un théorème facile à reconnaître). La difficulté fondamentale reste que

[11] Variante éventuelle : égalité des aires des triangles MAI et CIB.
[12] Cette propriété est corollaire de la propriété d'une médiane dans un triangle (partage du triangle en deux triangles d'aires égales), démontrée en 5e.

le processus n'est pas aussi idéalement "linéaire". Il faut souvent, pour satisfaire aux hypothèses d'un théorème que l'on cherche à appliquer, s'appuyer sur des données ou des résultats dont l'établissement nécessite plusieurs théorèmes différents. Pour maîtriser cette démarche, les élèves doivent en prendre conscience et la travailler. Il faut donc qu'ils s'y entraînent le plus tôt et le plus régulièrement possible, dans des conditions raisonnables. Le nombre de pas de la démonstration est un des éléments constitutifs de la difficulté du travail à réaliser mais d'une part, ce n'est pas le seul ni même parfois le principal, et d'autre part, comme il a été écrit plus haut, il n'est pas efficace de ne travailler que sur des démonstrations au nombre de pas réduit (inférieur ou égal à 2). Néanmoins, ces situations relatives à deux pas de raisonnement ne sont pas à négliger en particulier au début des apprentissages car elles permettent de comprendre dans un contexte accessible les bases de ce type de démarche.
Les exemples suivants mettent en évidence plusieurs situations qui permettent l'analyse remontante à un degré d'accessibilité élémentaire notamment au niveau de la 5^e et de la 4^e. Dès la classe de 6^e, il est par exemple possible de rencontrer des situations qui font passer de la définition à la propriété caractéristique de la médiatrice (ou réciproquement).

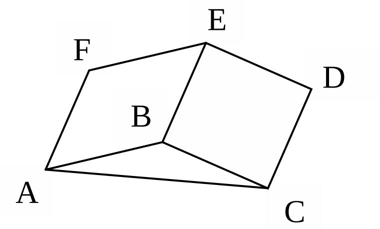
En 6^e : Les cercles de centre A *et* B *sont sécants en* M *et* P. *Que peut-on dire des droites* (AB) *et* (MP) *? Justifier.*



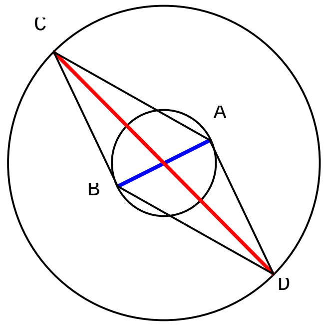
En 5^e : BCDE *est un carré.* ABEF *est un losange.*

$\widehat{BAC} = 20°$.

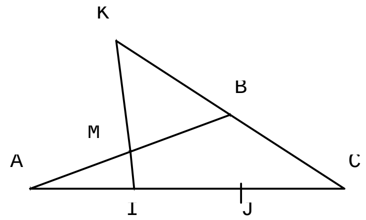
Déterminer l'angle $\widehat{AFE}$.



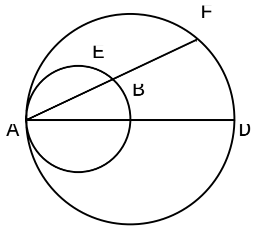
En 5^e : Le cercle de diamètre [AB] *et le cercle de diamètre* [CD] *ont le même centre. Montrer que* ACBD *est un parallélogramme.*



En 4^e : Dans le triangle ABC, M *est le milieu de* [AB] *et* I *et* J *des points de* [AC] *tels que* AI = IJ = JC = $\frac{1}{3}$AC. *La droite* (IM) *coupe* (BC) *en* K.
Montrer que B *est le milieu de* [KC].



En 4^e *: Soit le cercle C de centre* B *et de diamètre* [AD] *et le cercle C' de diamètre* [AB]. F *est un point de C. La droite* (AF) *coupe C' en* E.
Montrer que E *est le milieu de* [AF].



V- Quelques modalités de l'enseignement de la géométrie

- Le choix des supports d'enseignement

Ainsi qu'il a été dit ci-dessus (IV- les démarches), l'enseignement de la géométrie, comme d'ailleurs celui des autres champs des programmes de mathématiques, repose essentiellement sur la résolution de problèmes. Il est indispensable dès lors de proposer cette activité d'une façon assez systématique en l'identifiant clairement. Le problème doit favoriser une véritable initiative de la part de l'élève.

Aussi, convient-il d'éviter de qualifier de "problème" les supports d'enseignement déclinés en une succession de petites questions bien délimitées (exercices d'application et/ou à résolution guidée). De fait, dans ce cas, l'essentiel de la démarche est réalisé en amont par le rédacteur de l'énoncé et l'élève, dans le meilleur des cas, n'en découvrira l'unité que dans le cadre d'une synthèse, indispensable mais pas toujours présente. Il en est de même des fiches à trous ou des canevas (déductogrammes) imposés a priori, qui donnent un modèle de raisonnement mais ne permettent pas d’en construire un. De plus, les exercices guidés ou les fiches à trous empêchent de sortir du cadre et de la démarche prévus par l'enseignant, donc d'explorer plusieurs pistes et de faire émerger pour les confronter diverses méthodes. Si l'élaboration d'un canevas ou toute autre forme de schématisation est souvent nécessaire pour décortiquer, clarifier une démarche de raisonnement, elle est d'autant plus efficace qu'elle est réalisée avec ou par les élèves. Néanmoins, il peut être pertinent que le professeur se livre à l'exercice (par exemple à l'occasion de la démonstration de certains théorèmes) devant les élèves, à condition de bien expliciter tous les rouages de la démarche.

- De véritables démarches d'investigation

D'autre part, s'il convient, ainsi que le préconisent les textes officiels, de mettre les élèves en situation d'expérimenter, il est indispensable de leur proposer des situations qui relèvent d'une véritable démarche expérimentale. Ainsi, l'introduction du théorème de Pythagore se fait souvent à partir d'une activité qui consiste à mesurer les côtés de divers triangles rectangles et à constater la relation $a^2 = b^2 + c^2$. Le caractère expérimental de cette approche n'est pas avéré. Il semble en effet impossible pour un non initié de découvrir directement à partir des données relevées la permanence d'une relation entre des carrés de nombres, même avec beaucoup d'intuition. De fait, les fiches de travail fournies pour animer l'activité sont très fermées et cantonnent l'élève à des tâches d'exécution immédiates. Ainsi, il n'a aucune initiative et ne met pas réellement en œuvre une démarche d'investigation. Il est donc judicieux de choisir d'autres problématiques pour amener les élèves à pratiquer ce type de démarche. Ces situations doivent constituer des problèmes accessibles (amener un travail expérimental simple à concevoir et à mettre en œuvre pour les élèves) et déboucher sur des résultats significatifs. Par exemple, la recherche des triangles rectangles qui ont pour hypoténuse un segment donné peut donner lieu à la mise en place de la démarche

d'investigation. Une première étape expérimentale ("*je dessine plusieurs triangles répondant à la question avec l'équerre…*") permet de dégager le positionnement approximatif des troisièmes sommets sur un cercle dont les caractéristiques sont à déterminer. La conjecture peut être renforcée en traçant d'autres triangles, dont le troisième sommet est pris sur ce cercle, puis en mesurant l'angle obtenu. Les deux propriétés réciproques l'une de l'autre sont alors construites et la phase de preuve peut être entreprise afin de terminer l'étude.
Le niveau des situations proposées doit bien entendu être déterminé, dans le cadre des programmes, en cohérence avec les capacités réelles des élèves. Un contexte trop difficile ne leur permet pas de travailler les compétences visées (le professeur est de fait obligé de faire l'essentiel du travail). Il y a donc lieu d'admettre un résultat sans ambiguïté quand cela s'avère nécessaire. Un contexte trop simple et vide de sens pour certains élèves peut aussi les décourager car ils n'y trouvent ni enjeu ni sensation de progrès dans les connaissances. A cet égard, il convient de souligner l'importance des problèmes de reproduction et de construction. En effet, plus que d'autres, ils permettent, à partir d'énoncés souvent simples à appréhender, de faire varier les variables didactiques (contraintes sur les configurations ou les instruments disponibles, par exemple) et donc de les choisir en fonction du niveau adéquat.

- La mise en forme des raisonnements

Un autre volet des apprentissages, en géométrie tout particulièrement, est celui de la formalisation des raisonnements, c'est à dire de la communication de la preuve. Sans ignorer que la phase heuristique est incontournable dans la pratique du raisonnement, il est essentiel de faire travailler les élèves sur son explicitation, et ceci le plus tôt possible, à l'écrit comme à l'oral. Il s'agit, entre autres, de leur faire comprendre qu'une rédaction obéit à des règles de structuration, prenant appui sur les connecteurs de langage de la langue française, sans pour autant qu'il n'y ait qu'un seul modèle admissible. Au début du collège, tout formalisme dans la rédaction est évité ; l'écrit s'appuie sur les formulations proposées par les élèves, du moment qu'elles sont acceptables du point de vue du sens, même si celles-ci ne satisfont pas aux canons d'une "bonne rédaction".
Une difficulté particulière vient du fait que, suivant le niveau, les implicites (conventions liant l'émetteur et le récepteur) varient d'un contexte à l'autre.
Par exemple, les formalisations suivantes sont toutes correctes et recouvrent à peu près le même niveau d'implicite :
"On sait que ABCD *est un parallélogramme. Or, dans un parallélogramme, les côtés opposés sont de même longueur. Donc,* AB = CD.*"*
" ABCD *est un parallélogramme. Dans un parallélogramme, les côtés opposés sont de même longueur. Donc,* AB = CD.*"*
"Dans un parallélogramme, les côtés opposés sont de même longueur. On sait que ABCD *est un parallélogramme. Donc,* AB = CD.*"*
"Dans le parallélogramme ABCD*, les côtés opposés* [AB] *et* [CD] *sont de même longueur."*
"Les côtés opposés [AB] *et* [CD] *sont de même longueur, car ce sont des côtés opposés dans le parallélogramme* ABCD.*"*
…
D'autres formulations se rencontrent, tout aussi recevables, mais à un degré d'implicite plus élevé :
"Dans un parallélogramme, les côtés opposés sont de même longueur. Donc, AB = CD.*"*
"Dans le parallélogramme ABCD, AB = CD.*"*
Il n'est pas question de les repousser. Il s'agit de mettre en évidence l'inconvénient (éventuel !) d'une rédaction aussi condensée. Le niveau d'implicite accepté dans une rédaction est fonction de l'ancienneté de la connaissance et de la maîtrise du raisonnement déductif.

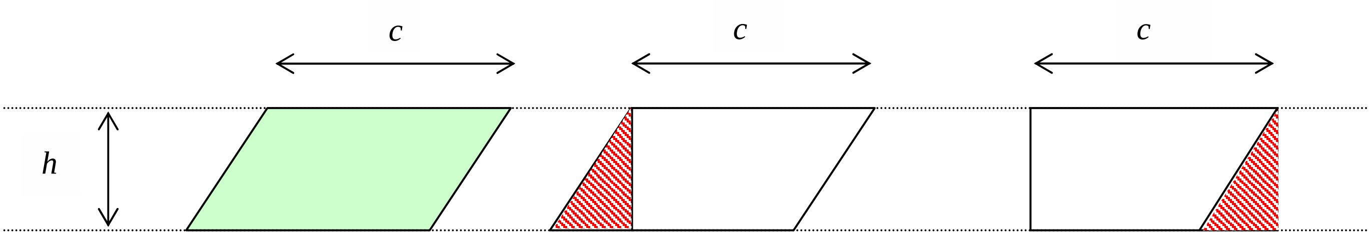
En revanche, la phrase : *"Si* ABCD *est un parallélogramme, les côtés opposés sont de même longueur. Donc,* AB = CD.*"* devra faire l'objet d'un travail d'analyse sur l'usage du "si". En effet, il est impropre d'utiliser le "si" dans cette phrase[13]. L'hypothèse du théorème est réalisée d'une façon manifeste. Dans ce cas, la formulation : *"Comme(Puisque)* ABCD *est un parallélogramme, ses côtés opposés* [AB] *et* [CD] *sont de même longueur"* est pertinente.
Le travail sur les formulations des rédactions ne fait pas l'objet d'un chapitre particulier mais s'effectue au coup par coup autant que de besoin. L'un des objectifs est d'améliorer tout au long du cursus en collège (et au lycée !) la fluidité de l'écriture sans en altérer la précision.

- Les interactions avec les autres champs des programmes

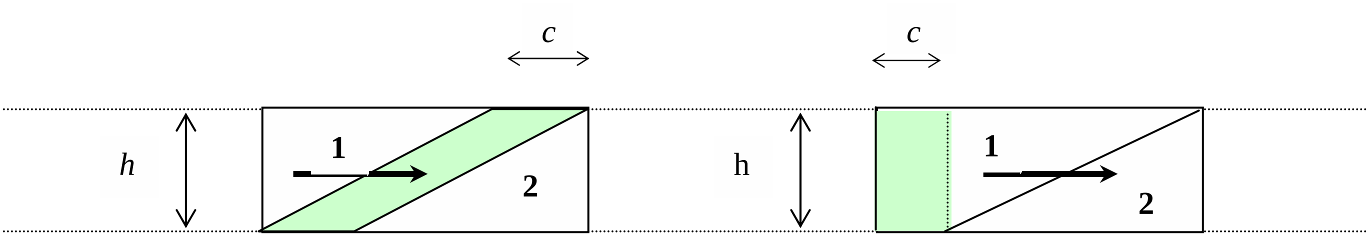
Pour que l'enseignement de la géométrie trouve toute son efficacité, il faut aussi la mettre en perspective avec les autres domaines des programmes. Ces mises en cohérence par l'étude de diverses interactions permettent de souligner l'importance de la géométrie dans la résolution des problèmes de toute nature, comme il est dit dans le paragraphe I-.
Dans le domaine des grandeurs, certaines : longueurs, angles, aires, volumes, sont étroitement associées à la géométrie. Dans le glissement de l'étude des objets à celle des grandeurs associées puis de leurs mesures, la géométrie croise le domaine des nombres et du calcul. Par exemple, il est possible de mettre en évidence des nombres nouveaux : a/b, $\sqrt{a}$ à l'aide de la longueur de segments. Le travail sur les objets du plan et de l'espace peut servir ainsi de support à des activités de calcul numérique ou littéral (et en justifier la nécessité !).
Inversement, la mise en place de diverses formules ou propriétés peut être soutenue par une illustration géométrique, par exemple, le découpage d'un rectangle pour le développement de $(a+b)(c+d)$. De même, certaines manipulations (ou animations), comme la suivante, permettent de valider visuellement quelques formules d'aires.

Exemples d'obtention de l'aire du parallélogramme :

Par décomposition, recomposition :



Par glissement du triangle 1 vers le triangle 2 :



$$A = c \times h$$

[13] Il n'est pas question pour autant d'invalider (au niveau du collège) cette rédaction puisque l'essentiel y figure (l'hypothèse, la propriété et la conclusion) dans le bon ordre et sans ambiguïté.

Au delà de la simple utilisation sous diverses formes de la propriété de Thalès, la géométrie permet de travailler très souvent la notion de proportionnalité. Par exemple, à l'occasion de l'étude des pyramides et des cônes de révolution, l'élaboration de patrons conduit à mettre en œuvre la proportionnalité dans un contexte particulier et non élémentaire. De même, la construction de diagrammes circulaires associe la proportionnalité et la notion d’angle.
Par ailleurs, la géométrie et les grandeurs associées représentent un cadre très souvent mis à contribution pour construire, mettre en évidence ou utiliser des fonctions au niveau de la classe de 3e.

- L'évaluation des élèves en géométrie

L'évaluation en géométrie repose trop souvent uniquement sur la production du seul produit fini, par exemple, la figure construite ou la démonstration rédigée. Il est indispensable, compte tenu des objectifs d'apprentissage fixés en terme de démarches, de travailler aussi à évaluer les procédures mises en œuvre par les élèves, abouties ou non. A cette fin, il faut donc encourager leur explicitation. Ainsi, la valorisation du codage des figures, de certaines remarques du type :
" Je reconnais deux triangles en situation de Thalès", "Je connais plusieurs propriétés qui pourraient marcher"… peut figurer dans le contrat passé avec les élèves à propos de l'évaluation de leurs compétences. De même, dans le cas des problèmes de construction, le schéma d'analyse codé doit être pris en compte.
Les exigences en terme de formalisation des démonstrations évoluent aussi dans le temps et en fonction du niveau du cursus. Il est impossible d'attendre la même rédaction d'un élève de 6e et d'un élève de 4e et par ailleurs d'un élève de 4e en début et en fin d'année scolaire.

ANNEXE	Classe de sixième	Classe de cinquième	Classe de quatrième	Classe de troisième
Figures planes	Quadrilatères : rectangle, losange, cerf-volant, carré. Triangles : triangles rectangle, isocèle, équilatéral. Droites parallèles, perpendiculaires Médiatrice d'un segment. Bissectrice d'un angle. Cercle. Reproduction, construction de figures	Parallélogramme. Figures admettant un centre ou des axes de symétrie. Caractérisation angulaire du parallélisme. Triangle : somme des angles, construction et inégalité triangulaire, cercle circonscrit, médianes et hauteurs.	Triangles : milieux et parallèles. Triangles déterminés par deux parallèles coupant deux sécantes. Triangle rectangle : théorème de Pythagore, cosinus d'un angle aigu, cercle circonscrit. Distance d'un point à une droite. Tangente à un cercle. Bissectrices et cercle inscrit.	Triangle rectangle : relations trigonométriques. Théorème de Thalès. Angle inscrit, angle au centre. Polygones réguliers.
Configurations dans l'espace	Parallélépipède rectangle : patrons, représentation en perspective.	Prismes droits, cylindres de révolution : patrons, représentation.	Pyramide et cône de révolution.	(Problèmes de) sections planes de solides. Sphère, représentation.
Transformations	Symétrie orthogonale par rapport à une droite.	Symétrie centrale.	Agrandissement et réduction.	Agrandissement et réduction
Grandeurs et mesures de la géométrie	Longueurs : comparaison, calcul, changements d'unités. Longueur d'un cercle Angles : comparaison, rapporteur. Aires : comparaison, mesure, aire d'un rectangle, aire d'un triangle-rectangle et calcul d'aires, changements d'unité. Volume du parallélépipède rectangle : approche et calculs simples.	Longueurs : Calculs. Angles : mesure. Aires : parallélogramme, triangle, disque. Volumes : prisme, cylindre de révolution,	Effet d'une réduction, d'un agrandissement sur des longueurs, des angles. Aires et volumes : pyramide et cône.	Effet d'une réduction, d'un agrandissement sur des aires, des volumes. Aire de la sphère, volume de la boule.